FPSAC 2012, Nagoya, Japan DMTCS proc. **AR**, 2012, 297–306

Les polynômes eulériens stables de type B

Mirkó Visontai[1] and Nathan Williams[2]

[1]*Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104*
[2]*School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455*

Abstract. We give a multivariate analog of the type B Eulerian polynomial introduced by Brenti. We prove that this multivariate polynomial is stable generalizing Brenti's result that every root of the type B Eulerian polynomial is real. Our proof combines a refinement of the descent statistic for signed permutations with the notion of real stability—a generalization of real-rootedness to polynomials in multiple variables. The key is that our refined multivariate Eulerian polynomials satisfy a recurrence given by a stability-preserving linear operator.

Résumé. Nous présentons un raffinement multivarié d'un polynôme eulérien de type B défini par Brenti. En prouvant que ce polynôme est stable nous généralisons un résultat de Brenti selon laquel chaque racine du polynôme eulérien de type B est réelle. Notre preuve combine un raffinement de la statistique des descentes pour les permutations signées avec la stabilité—une généralisation de la propriété d'avoir uniquement des racines réelles aux polynômes en plusieurs variables. La connexion est que nos polynômes eulériens raffinés satisfont une récurrence donnée par un opérateur linéaire qui préserve la stabilité.

Keywords: type B Eulerian polynomials, polynomials with real roots only, stability

1 Introduction

Le polynôme eulérien de type A, désigné par $A_n(x)$, peut être interprété de façon combinatoire comme la fonction génératrice de descentes de permutations dans le groupe de Coxeter A_n, ou le groupe $\mathrm{Sym}(n+1)$ de permutations en $n+1$ lettres ([Foata et Schützenberger(1970), Foata(2010)]). On peut étendre le concept de descente des éléments de tous les groupes de Coxeter finis—pour un élément σ du groupe de Coxeter W, les descentes sont exactement les générateurs s de W dont l'action sur σ réduit sa longueur. [Brenti(1994)] utilise cette interprétation de descente pour définir les polynômes W-eulériens, noté par $W(x)$, pour chaque groupe de Coxeter fini W.

Dans ce papier, nous étudions les racines des polynômes eulériens. Brenti a montré que de nombreux résultats classiques sur $A_n(x)$ sont également valables pour les autres polynômes eulériens. Nous allons examiner la propriété remarquable que ces polynômes ont uniquement des racines réelles, un résultat de [Frobenius(1910)] pour les polynômes $A_n(x)$. Brenti a aussi montré le résultat analogue pour le type B, et il a vérifié les cas exceptionnels par ordinateur, mais il a laissé le type D—le seul cas restant—comme une conjecture.

Conjecture 1.1 (Conjecture 5.2 de [Brenti(1994)]) *Pour chaque groupe de Coxeter fini W, la fonction génératrice de descentes $W(x)$ a uniquement des racines réelles.*

Récemment, Dilks, Petersen, et Stembridge ont généralisé la définition des polynômes eulériens aux descentes affines, et ils ont proposé un compagnon à la conjecture de Brenti.

Conjecture 1.2 (Conjecture 4.1 de [Dilks *et al.*(2009)]) *Pour chaque groupe de Weyl fini W, la fonction génératrice de descentes affines $\widetilde{W}(x)$ a uniquement des racines réelles.*

Ils ont été prouvé que $\widetilde{A}_n(x)$ et $\widetilde{C}_n(x)$ avaient uniquement des racines réelles, les cas exceptionnels ont été vérifié par ordinateur, mais la conjecture pour les polynômes eulériens affines de types B et D reste un problème ouvert.

Dans ce papier, nous utilisons le concept de *stabilité* réelle—une généralisation de la propriété d'avoir uniquement des racines réelles aux polynômes multivariés. Nous combinons ceci avec des récurrences simples pour des raffinements multivariés de certains polynômes eulériens afin de fournir des preuves simples de généralisations multivariés de résultats connus sur les racines réelles.

Plus précisément, nous utilisons une méthode générale pour montrer que les relations de récurrence satisfaites par ces polynômes W-eulériens multivariés (pour certaines groupes de Coxeter finis W) préservent la stabilité. Nous utilisons ensuite les propriétés de stabilité pour montrer que cela implique que les homologues univariés de ces polynômes sont également stables, ce qui est équivalent à dire qu'ils ont uniquement des racines réelles.

Le reste de ce papier est structuré en fonction de ce qui suit. Dans la Section 2, nous introduisons la notation, nous définissons les polynômes W-eulériens pour les groupes de Coxeter finis et les polynômes (affines) $\widetilde{W}$-eulériens pour les groupes de Weyl finis, respectivement. Nous donnons les définitions et les résultats nécessaires pour la stabilité. Pour rendre la présentation indépendante, nous commençons dans la Section 3 avec une preuve de Brändén de la stabilité du polynôme eulérien multivarié de type A. Dans la Section 4 nous généralisons cette idée au type B (les permutations signées). Il est possible de étendre les résultats au groupe symétrique généralisée (les permutations colorées), et aussi à plusieurs variables q, et les polynômes eulériens affines de types A et C (voir Section 5 et [Visontai et Williams(2012)]).

2 Préliminaires

Nous commençons par l'introduction de la notation. Si n est un entier positif, nous écrivons $[n]$ pour l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathbf{x}$ pour le n-uplet $x_1, \ldots, x_n$; par exemple, $\mathbf{x}+\mathbf{y} = x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n$. Si $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble (ou un multi sous-ensemble) de $[n]$, soit $\mathbf{x}^{\mathcal{T}} = \prod_{i \in T} x_i$; par exemple, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^{[n]} = \prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$. Nous écrivons $|\mathcal{T}|$ pour la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{T}$. On note la concaténation de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Nous appliquons une fonction f de n variables à un n-uplet $\mathbf{x}$ en écrivant $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. La plupart des fonctions que nous définirons auront $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ comme variables, c'est pourquoi nous définissons le symbole spécial $\boldsymbol{\partial} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i})$ comme un raccourci pour la somme des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_i et y_i.

Les théorèmes et les propositions qui viennent de travaux précédents sont clairement marqués par une référence (en indiquant la source) ; nous croyons que tous les autres résultats sont nouveaux.

2.1 Polynômes W-eulériens

Soit S un ensemble de générateurs Coxeter, m une matrice Coxeter, et soit

$$W = \langle S : (ss')^{m(s,s')} = e, \ \text{avec } s, s' \in S, \ m(s,s') < \infty \rangle$$

le groupe de Coxeter correspondant (voir [Björner et Brenti(2005)]).

Si (W, S) est un système Coxeter et $\sigma \in W$, nous écrivons $\ell_W(\sigma)$ pour la longeur de σ par rapport à S.

Definition 2.1 *Si W est un groupe de Coxeter fini, l'ensemble des* descentes *de $\sigma \in W$ est*

$$\mathcal{D}_W(\sigma) = \{s \in S : \ell_W(\sigma s) < \ell_W(\sigma)\}.$$

Definition 2.2 *Si W est un groupe de Coxeter fini, le* polynôme W-eulérien *est la fonction génératrice*

$$W(x) = \sum_{\sigma \in W} x^{|\mathcal{D}_W(\sigma)|}.$$

Les définitions ci-dessus ont été généralisées dans [Dilks *et al.*(2009)] et incluent des descentes affines.

Definition 2.3 *Si W est un groupe de Weyl fini, l'ensemble des* descentes affines *de $\sigma \in W$ est*

$$\widetilde{\mathcal{D}}_W(\sigma) = \mathcal{D}_W(\sigma) \cup \{s_0 : \ell_W(\sigma s_0) > \ell_W(\sigma)\},$$

où s_0 est la réflexion le plus basse correspondant à la racine dans le système racinaire cristallographique sous-jacent. Voir [Dilks et al.*(2009)] pour plus de détails et pour la motivation derrière cette définition.*

Definition 2.4 *Si W est un groupe de Weyl fini, le* polynôme $\widetilde{W}$-eulérien *est la fonction génératrice des descentes affines (sur le groupe de Weyl fini W correspondant)*

$$\widetilde{W}(x) = \sum_{\sigma \in W} x^{|\widetilde{\mathcal{D}}_W(\sigma)|}.$$

2.2 Polynômes stables

Nous définissons la stabilité (réelle). Elle généralise la propriété des polynômes univariés réels d'avoir seulement des racines réelles aux polynômes multivariés.

Soit $\mathcal{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur ouvert et $\mathcal{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

Definition 2.5 *Un polynôme $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ est* stable *si $f \equiv 0$ ou si pour chaque $\mathbf{z} \in \mathcal{H}_+^n$, $f(\mathbf{z}) \neq 0$.*

Notez qu'un polynôme univarié $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il est stable. Suivant [Wagner(2011)], nous écrivons $\mathfrak{S}_\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ pour l'ensemble des polynômes stables en $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$.

Dans ce papier, nous avons un modèle fixe pour nos preuves. On utilise l'induction, en vérifiant (à la main) la stabilité du scénario de base. Ensuite, nous établissons des formules récursives de la forme suivante

$$W_n = T\left(W_{n-1}\right),$$

où W_n est le polynôme W-eulérien multivarié d'un groupe W de classement n, et T est un opérateur linéaire. Pour terminer, nous montrons que l'opérateur linéaire T préserve la stabilité en utilisant le théorème suivant.

Un polynôme $f(\mathbf{x})$ est multiaffine si la puissance de chaque indéterminée x_i est au plus un. Pour un ensemble $\mathcal{P}$ de polynômes, soit $\mathcal{P}^{MA}$ l'ensemble de polynômes multiaffines en $\mathcal{P}$.

Théorème 2.1 (Une partie du Théorème 3.5 dans [Wagner(2011)]) *Soit $T : \mathbb{R}[\mathbf{x}]^{MA} \to \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ un opérateur linéaire agissant sur les variables $\mathbf{x}$. Si le polynôme $T((\mathbf{x}+\mathbf{y})^{[n]}) \in \mathfrak{S}_\mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, T envoie $\mathfrak{S}_\mathbb{R}[\mathbf{x}]^{MA}$* dans $\mathfrak{S}_\mathbb{R}[\mathbf{x}]$.

Lorsque qu'on a démontré la stabilité des polynômes W-eulérien multivariés, nous pouvons les réduire à des polynômes univariés stables en utilisant les opérations suivantes.

Lemme 2.2 (Une partie de Lemme 2.4 dans [Wagner(2011)]) *Si $i, j \in [n]$, les opérations suivantes préservent la stabilité (réelle) de $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$:*

1. Différentiation : $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
2. Diagonalisation : $f \mapsto f|_{x_i = x_j}$.
3. Spécialisation : *Si* $a \in \mathbb{R}$, $f \mapsto f|_{x_i = a}$.

Nous notons que la plupart de ces résultats ont une contrepartie complexe, mais pour nous la stabilité réelle suffit—tous les polynômes que nous considérons ont des coefficients entiers positifs. Pour cette raison nous appellerons des polynômes ayant la propriété stable réelle simplement des polynômes stables.

3 Polynômes eulériens stables de type A

Pour rendre la présentation indépendante, nous commençons avec une preuve de Brändén de la stabilité du polynôme eulérien multivarié de type A.

Soit A_n le groupe de Coxeter de type A de classement n. On peut considérer A_n comme $\mathrm{Sym}(n+1)$, le groupe de toutes les permutations sur $[n+1]$ avec les générateurs $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, où s_i est la transposition $(i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Proposition 3.1 (Proposition 1.5.3 dans [Björner et Brenti(2005)]) *Given $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{n+1} \in A_n$,*

$$\mathcal{D}_A(\sigma) = \{s_i \in S : \sigma_i > \sigma_{i+1}\},$$

Le théorème suivant est bien connu. Il était déjà connu par Frobenius et a été redémontré nombreuses fois depuis.

Théorème 3.2 (page 829 de [Frobenius(1910)])

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in A_n} x^{|\mathcal{D}_A(\sigma)|} \tag{1}$$

a uniquement des racines réelles.

La preuve du Théorème 3.2 peut être faite en utilisant le théorème de Rolle ou par la méthode des racines entremêlées, mais le résultat devient transparent après l'introduction de variables supplémentaires et en utilisant les propriétés de stabilité.

Definition 3.1 *Pour $\sigma \in A_n$, nous définissons l'ensemble des* hauts des descentes *(descent tops en anglais) pour le type A par*

$$\mathcal{DT}_A(\sigma) = \{\max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) : 1 \leq i \leq n, \sigma_i > \sigma_{i+1}\},$$

et de la même manière, nous définissons l'ensemble des hauts des montées *(ascent tops en anglais) pour le type A par*

$$\mathcal{AT}_A(\sigma) = \{\max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) : 1 \leq i \leq n, \sigma_i < \sigma_{i+1}\}.$$

Par exemple, quand $\sigma = 31452 \in A_4$, $\mathcal{DT}_A(\sigma) = \{3, 5\}$ et $\mathcal{AT}_A(\sigma) = \{4, 5\}$.

La notation superflue $\max(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ se simplifie à σ_i et σ_{i+1} dans le cas des ensembles des hauts des descentes et des montées de type A, respectivement. L'importance de cette notation deviendra claire lorsque nous introduirons les ensembles des hauts des descentes et des montées de type B.

Théorème 3.3 ([Brändén(2010)])

$$A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\sigma \in A_n} \mathbf{x}^{\mathcal{DT}_A(\sigma)} \mathbf{y}^{\mathcal{AT}_A(\sigma)} \tag{2}$$

est stable.

Démonstration: Nous utilisons l'induction. $A_0(x_1, y_1) = 1$ est stable. En observant l'effet de l'insertion de $n+1$ dans une permutation $\sigma \in A_{n-1}$ sur les ensembles des hauts des descentes et des montées de type A, nous obtenons la récurrence suivante. Pour $n > 0$,

$$A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_{n+1} + y_{n+1}) A_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + x_{n+1} y_{n+1} \boldsymbol{\partial} A_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3}$$

Nous rappelons ici au lecteur que $\boldsymbol{\partial} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$.

En utilisant le Théorème 2.1, il est facile de vérifier que l'opérateur linéaire $T = (x_{n+1} + y_{n+1}) + x_{n+1} y_{n+1} \boldsymbol{\partial}$ préserve la stabilité, car

$$T((\mathbf{x}+\mathbf{u})^{[n]}(\mathbf{y}+\mathbf{v})^{[n]}) = x_{n+1} y_{n+1} \underbrace{\left[\frac{1}{y_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + u_i} + \frac{1}{y_i + v_i} \right) \right]}_{\text{In } \mathcal{H}_- \text{ when } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}^+} (\mathbf{x}+\mathbf{u})^{[n]} (\mathbf{y}+\mathbf{v})^{[n]}$$

appartient à $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$. □

En spécialisant les variables y_i à 1, nous voyons que

Corollaire 3.4

$$A_n(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in A_n} \mathbf{x}^{\mathcal{DT}_A(\sigma)}$$

est stable.

En diagonalisant $\mathbf{x}$, nous obtenons

Corollaire 3.5

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in A_n} x^{|\mathcal{DT}_A(\sigma)|} = \sum_{\sigma \in A_n} x^{|\mathcal{D}_A(\sigma)|}$$

est stable.

Comme $A_n(x)$ est univarié, ce corollaire est équivalente à dire que $A_n(x)$ a uniquement des racines réelles (Théorème 3.2).

La référence [Haglund et Visontai(2012)] fournit une preuve de la stabilité d'un raffinement multivarié (un peu différent) des polynômes eulérien classiques. Ce raffinement a des liens étroits avec le polynôme eulérien affine de type C.

Ensuite, nous présentons nos résultats. Nous commençons par la définition du polynôme eulérien multivarié de type B et une preuve qu'il est stable.

4 Polynômes eulériens stables de type B

Soit B_n le groupe de Coxeter de type B de classement n. Nous considérerons B_n comme le groupe de toutes les permutations signées sur $[\pm n] = \{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$ avec générateurs $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$, où s_0 est la transposition $(-1, 1)$ et $s_i = (i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Pour $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in B_n$, nous notons

$$N(\sigma) = |\{i \in [n] : \sigma_i < 0\}|$$

le nombre d'entrées négatives dans la permutation signée σ.

Les descentes de type B ont une description combinatoire simple que nous allons exploiter.

Proposition 4.1 (Corollaire 3.2 de [Brenti(1994)], et Proposition 8.1.2 de [Björner et Brenti(2005)]) *Pour $\sigma \in B_n$,*

$$\mathcal{D}_B(\sigma) = \{s_i \in S : \sigma_i > \sigma_{i+1}\},$$

où $\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

De la même manière que pour le type A, les polynômes eulériens de type B n'ont que des racines réelles.

Théorème 4.2 ([Brenti(1994)])

$$B_n(x) = \sum_{\sigma \in B_n} x^{|\mathcal{D}_B(\sigma)|} \tag{4}$$

a uniquement des racines réelles.

[Brenti(1994)] a introduit un q-analogue des polynômes eulériens univarié, et il a démontré ce qui suit.

Théorème 4.3 (Corollaire 3.7 de [Brenti(1994)]) *Si $q \geq 0$,*

$$B_n(x; q) = \sum_{\sigma \in B_n} q^{N(\sigma)} x^{|\mathcal{D}_B(\sigma)|}. \tag{5}$$

a uniquement des racines réelles.

Ces polynômes $B_n(x; q)$ peuvent être spécialisées aux polynômes eulériens $A_{n-1}(x)$ et $B_n(x)$—quand $q = 0$ et $q = 1$, respectivement—ce qui montre que le Théorème 4.3 généralise simultanément les Théorèmes 3.2 et 4.2.

Nous allons généraliser ce résultat de la même manière que la Théorème 3.3 est une généralisation de Théorème 3.2. Rappelons que la stabilité du raffinement multivarié des polynômes eulériens de type A dans (2) provenaient du choix de la statistique. La choix du plus grand index de chaque montée et descente a abouti à la récursion simple qui préserve la stabilité. Nous appliquons cette idée aux permutations signées de telle manière que les définitions restent compatibles avec les définitions pour les permutations ordinaires.

Definition 4.1 *Pour $\sigma \in B_n$, nous définissons l'ensemble des* hauts des descentes *pour le type B par*

$$\mathcal{DT}_B(\sigma) = \{\max(|\sigma_i|, |\sigma_{i+1}|) : 0 \leq i \leq n-1,\ \sigma_i > \sigma_{i+1}\}.$$

De la même manière, nous définissons l'ensemble des hauts des montées *pour le type B par*

$$\mathcal{AT}_B(\sigma) = \{\max(|\sigma_i|, |\sigma_{i+1}|) : 0 \leq i \leq n-1,\ \sigma_i < \sigma_{i+1}\}.$$

Par exemple, quand $\sigma = (3, 1, -4, -5, 2) \in B_5$, $\mathcal{DT}_B(\sigma) = \{3, 4, 5\}$ et $\mathcal{AT}_B(\sigma) = \{3, 5\}$.

Théorème 4.4 *Si $q \geq 0$,*

$$B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q) = \sum_{\sigma \in B_n} q^{N(\sigma)} \mathbf{x}^{\mathcal{DT}_B(\sigma)} \mathbf{y}^{\mathcal{AT}_B(\sigma)} \tag{6}$$

est stable.

Démonstration: Comme dans la preuve du Théorème 3.3, nous utilisons l'induction. $B_1(x_1, y_1; q) = qx_1 + y_1$ est stable quand $q \geq 0$, ce qui prouve le cas de base.

En observant l'effet de l'insertion de $n+1$ ou $-(n+1)$ dans une permutation $\sigma \in B_n$ sur les ensembles des hauts des descentes et des montées de type B, nous obtenons la récurrence suivante. Pour $n > 0$,

$$B_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q) = (qx_{n+1} + y_{n+1}) B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q) + (1+q) x_{n+1} y_{n+1} \boldsymbol{\partial} B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q). \tag{7}$$

Pour terminer la preuve, nous notons que pour un $q \geq 0$ fixe, l'opérateur linéaire $T = (qx_n + y_n) + (1+q)x_n y_n \boldsymbol{\partial}$ préserve la stabilité selon le Théorème 2.1, car

$$T((\mathbf{x}+\mathbf{u})^{[n]}(\mathbf{y}+\mathbf{v})^{[n]}) = x_{n+1}y_{n+1} \left[\frac{q}{y_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1+q}{x_i + u_i} + \frac{1+q}{y_i + v_i} \right) \right] (\mathbf{x}+\mathbf{u})^{[n]}(\mathbf{y}+\mathbf{v})^{[n]}$$

appartient à $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ quand $q \geq 0$. $\square$

Notre théorème a quelques conséquences immédiates.

L'évaluation de $B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q)$ à $q = -1$ vient directement de la récursion.

Corollaire 4.5

$$B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -1) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^{[n]}$$

Si nous posons $q = 1$, nous obtenons l'analogue du Théorème 3.3 pour le type B.

Corollaire 4.6

$$B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 1) = \sum_{\sigma \in B_n} \mathbf{x}^{\mathcal{DT}_B(\sigma)} \mathbf{y}^{\mathcal{AT}_B(\sigma)}$$

est stable.

Nous attirons l'attention sur le fait que si nous mettons $q = 0$ dans (6), nous obtenons un polynôme homogénéisé qui est différent de $A_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini en (2), parce que leur récursions sont différentes. $B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0)$ est la permanent de la matrice $M = (m_{ij})$ de taille $n \times n$ considéré par [Brändén *et al.*(2011)]. Pour $i, j \in [n]$, soit $m_{ij} = x_i$ quand $i < j$ et autrement soit $m_{ij} = y_j$. Lorsque nous développons le permanent par la dernière colonne, nous obtenons la récurrence de (7) avec $q = 0$ (voir Lemme 3.3 dans [Brändén *et al.*(2011)] pour une preuve).

En spécialisant des variables y à 1 dans $B_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; q)$, nous voyons que

Corollaire 4.7 *Si* $q \geq 0$,

$$B_n(\mathbf{x}; q) = \sum_{\sigma \in B_n} q^{N(\sigma)} \mathbf{x}^{\mathcal{DT}_B(\sigma)}$$

est stable.

Enfin, observons que (le polynôme non-homogène) $B_n(\mathbf{x}, q)$ devient $A_{n-1}(\mathbf{x})$ et $B_n(\mathbf{x})$—les polynômes eulériens multivariés de types A et B—quand $q = 0$ and $q = 1$, respectivement. Par la diagonalisation de $\mathbf{x}$ en $B_n(\mathbf{x}, q)$, on obtient le polynôme $B_n(x, q)$ défini dans (5).

Nous retrouvons en corollaire le Théorème 4.3.

Corollaire 4.8 *Si* $q \geq 0$, $B_n(x; q)$ *est stable.*

5 Autres résultats

En utilisant des méthodes similaires, on peut obtenir des résultats analogues pour le groupe symétrique généralisé (ou permutations colorées) et les polynômes eulériens affines de types A et C définis par [Dilks *et al.*(2009)].

Soit A_n le groupe de Coxeter de type A de classement n. Les descentes affines de type A consistent en des descentes (ordinaires) de type A avec une descente supplémentaire à 0, si et seulement si $\sigma_{n+1} > \sigma_1$, où $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}) \in A_n$. Plus précisement,

$$\widetilde{\mathcal{D}}_A(\sigma) = \mathcal{D}_A(\sigma) \cup \{s_0 : \sigma_{n+1} > \sigma_1\}.$$

Voir la Section 5.1 de [Dilks *et al.*(2009)] pour plus de détails. Les définitions de l'ensemble des hauts des descentes et des montées de type A peuvent être généralisées de manière évidente et nous obtenons le résultats suivant.

Théorème 5.1

$$A_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\sigma \in A_n} \mathbf{x}^{\widetilde{\mathcal{DT}}_A(\sigma)} \mathbf{y}^{\widetilde{\mathcal{AT}}_A(\sigma)} \tag{8}$$

est stable.

Une discussion détaillée de celui-ci et autres résultats apparaîtra dans un prochain article ([Visontai et Williams(2012)]).

Remerciements

Nous sommes reconnaissants aux organisateurs de GSCC'11 pour rendre possible pour les auteurs de rencontrer. Nous remercions nos tuteurs, J. Haglund et D. Stanton, pour leurs conseils, les rapporteurs de ce papier pour leurs critiques, et M. Vizcarro pour son aide qui ont permis d'améliorer la présentation en français.

Références

[Björner et Brenti(2005)] A. BJÖRNER et F. BRENTI : *Combinatorics of Coxeter groups*, vol. 231 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005.

[Brändén(2010)] P. BRÄNDÉN : Communication personnelle, 2010.

[Brändén *et al.*(2011)] P. BRÄNDÉN, J. HAGLUND, M. VISONTAI et D. G. WAGNER : Proof of the monotone column permanent conjecture. *In Notions of Positivity and the Geometry of Polynomials*, p. 63–78. Birkhäuser Verlag, 2011.

[Brenti(1994)] F. BRENTI : q-Eulerian polynomials arising from Coxeter groups. *European J. Combin.*, 15(5):417–441, 1994.

[Dilks *et al.*(2009)] K. DILKS, T. K. PETERSEN et J. R. STEMBRIDGE : Affine descents and the Steinberg torus. *Adv. in Appl. Math.*, 42(4):423–444, 2009.

[Foata(2010)] D. FOATA : Eulerian polynomials : from Euler's time to the present. *The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Sciences*, p. 253–273, 2010.

[Foata et Schützenberger(1970)] D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBERGER : *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, vol. 138 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Frobenius(1910)] G. FROBENIUS : Über die BERNOULLI'schen Zahlen und die EULER'schen Polynome. *In Sitzungbreichte der Königlich Preußichen Akademie der Wissenschaften*. Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, 1910. Zweiter Halbband.

[Haglund et Visontai(2012)] J. HAGLUND et M. VISONTAI : Stable multivariate Eulerian polynomials and generalized Stirling permutations. *European J. Combin.*, 33(4):477–487, 2012.

[Visontai et Williams(2012)] M. VISONTAI et N. WILLIAMS : Stable multivariate W-Eulerian polynomials. Soumis pour publication, 2012.

[Wagner(2011)] D. G. WAGNER : Multivariate stable polynomials : theory and applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 48(1):53–84, 2011.